E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.S.E.N. - I.S.E.P.

CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1988

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES Série M

Vendredi 13 mai 1988 de 8 h à 12 h

ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de l'orthographe.

Avant-propos

- Tous les espaces vectoriels considérés sont réels.
- On confond polynôme et fonction polynomiale.
- $\mathbb{R}_n[x]$ désigne l'ensemble formé par le polynôme nul et les polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- Si $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, et si u est un endomorphisme ou une matrice, on pose :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k, \text{ avec } u^0 \text{ égal à l'identité I ou à la matrice unité I.}$$

Partie I

I.1. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de A. A est-elle diagonalisable ?

Calculer : $A_1 = (A - 4I)^2$, $A_2 = (A - I)^2$ et $A_3 = (A - 4I)^2(A - I)$.
Que vaut $(A - I)^2(A - 4I)$?

I.2. $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont p réels distincts et f une fonction réelle de la variable réelle, dérivable, telle que $f(\lambda_i)$ et $f'(\lambda_i)$ existent pour $i = 1,2,\ldots,p$.

a. Montrer qu'il existe au plus un polynôme, P_f , de $\mathbb{R}_{2p-1}[x]$ tel que : $P_f(\lambda_i) = f(\lambda_i)$ et $P_f'(\lambda_i) = f'(\lambda_i)$ pour $i = 1,2,\ldots,p$.

b. Si $p = 2$, $\lambda_1 = 1$ et $1 < \lambda = \lambda_2$, montrer que P_f existe et que $P_f(x)$ vaut :

$$\frac{f(\lambda)}{(\lambda-1)^2}(x-1)^2 + \frac{f(1)}{(\lambda-1)^2}(x-\lambda)^2 + \left[\frac{f'(1)}{(\lambda-1)^2} + \frac{2f(1)}{(\lambda-1)^3}\right](x-\lambda)^2(x-1) + \left[\frac{f'(\lambda)}{(\lambda-1)^2} - \frac{2f(\lambda)}{(\lambda-1)^3}\right](x-1)^2(x-\lambda).$$

c. Soit $\theta : \mathbb{R}_{2p-1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{2p}$ défini par : $\theta(P) = (P(\lambda_1),\ldots,P(\lambda_p),P'(\lambda_1), \ldots, P'(\lambda_p))$.

Montrer que θ est linéaire et injective. En déduire l'existence de P_f dans le cas général, et des polynômes R_i et T_i de $\mathbb{R}_{2p-1}[x]$, indépendants de f tels que : $P_f = \sum_{i=1}^{p} (f(\lambda_i)\, R_i + f'(\lambda_i)\, T_i)$.

T.s.v.p.

I.3. Soit M une matrice carrée réelle d'ordre n telle que :

$\det(xI - M) = \prod_{i=1}^{p} (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$, où $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont p réels distincts, et les α_i des entiers égaux à 1 ou 2.

a. Montrer que $\psi(x) = \prod_{i=1}^{p} (x - \lambda_i)^2$ vérifie : $\psi(M) = 0$.

b. Montrer que, si f est un polynôme, on a : $f(M) = P_f(M)$.

c. Par extension, si f n'est pas un polynôme, on définit : $f(M) = P_f(M)$.

Si on suppose : $\lambda_i > 0$ pour i = 1,2,...,p, on peut, par exemple, définir $\sqrt{M}$.

Montrer que : $(\sqrt{M})^2 = M$.

I.4. On choisit n = 3 et pour A la matrice définie au I.1. Déterminer la matrice $B = \sqrt{A}$; calculer son polynôme caractéristique.

I.5. On donne : $B_1 = (B-2I)^2$, $B_2 = (B-I)^2$ et $B_3 = (B-2I)^2(B-I)$.
Pour $q \in \mathbb{N}^*$, calculer B^q comme combinaison linéaire de B_1, B_2 et B_3.

Partie II On suppose que f, définie en I.2, est développable en série entière sur]-R,R[où R est strictement positif, éventuellement infini, et : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ si $|x| < R$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme $\| \ \|$, vérifiant : $\forall (M,P) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\|M.P\| \leqslant \|M\|\|P\|$.

II.1. Si λ est valeur propre de M, montrer que : $|\lambda| \leqslant \|M\|$. On pourra considérer, si V est vecteur propre associé à λ, la matrice P carrée d'ordre n dont toutes les colonnes sont V, puis le produit M.P .

II.2. Si $\|M\| < R$, montrer que la série de terme général $a_k M^k$ est convergente. On note $\tilde{f}(M)$ sa somme.

II.3. Si n = 3, B la matrice définie en I.4 et t un réel, calculer $\widetilde{sh}(tB)$. Montrer que : $t \longmapsto \widetilde{sh}(tB)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

II.4. On suppose que M est une matrice vérifiant : $\|M\| < R$, ainsi que les hypothèses de I.3. On veut établir que : $f(M) = \tilde{f}(M)$. On note $S_q(x) = \sum_{k=0}^{q} a_k x^k$.

Montrer que, avec les notations utilisées en I.2 :

$$S_q(M) - f(M) = \sum_{i=1}^{p} \left[[S_q(\lambda_i) - f(\lambda_i)] R_i(M) + [S_q'(\lambda_i) - f'(\lambda_i)] T_i(M) \right].$$

Conclure.

II.5. Dans cette question E est un espace vectoriel réel et normé par $\| \ \|$, tel que toute suite de Cauchy est convergente dans E, u est un endomorphisme de E tel que $\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|$ existe et vaut α, où $\alpha \in]0,1[$.

a. Montrer que : $\forall x \in E, \forall k \in \mathbb{N} : \left\|u^k(x)\right\| \leq \alpha^k \|x\|$.

b. Montrer que : $\left(S_q(x) = \sum_{k=0}^{q} u^k(x)\right)_{q\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour tout x fixé. Soit S(x) sa limite.
Etablir que : $(I-u)(S(x)) = S((I-u)(x)) = x$.

Partie III Dans cette partie on écrira les éléments de $\mathbb{R}^3$ sous forme de matrice colonne $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et on définit : $\|Y\| = \sup(|y_1|, |y_2|, |y_3|)$. E est l'espace des fonctions continues de $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Si $Y : t \longrightarrow Y(t)$ est un élément de E, on pose $\|Y\|_\infty = \sup_{t\in\left[0,\frac{1}{3}\right]} \|Y(t)\|$.

On rappelle que E, muni de $\| \|_\infty$, vérifie les hypothèses de II.5. A est la matrice définie au I.1 et $B = \sqrt{A}$.

III.1. Montrer que, si $Y \in E$: $\|AY\|_\infty \leq 9 \|Y\|_\infty$.

III.2. Si $Y \in E$, on pose : $(u(Y))(t) = \int_0^t (t-x)\, AY(x)\, dx$.

a. Montrer que u(Y) est un élément de E. Montrer que u(Y) est aussi dérivable et calculer sa dérivée.

b. Montrer que u est un endomorphisme de E et qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $\sup_{\|Y\|_\infty \leq 1} \|u(Y)\|_\infty \leq \alpha$.

c. Etablir que : $\forall q \in \mathbb{N}^* \quad \left(u^q(Y)\right)(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^{2q-1}}{(2q-1)\ !}\, B^{2q}\, Y(x)\, dx$.

III.3. Montrer que si Z est donné dans E, l'équation :

$$Y(t) - \int_0^t (t-x)\, AY(x)\, dx = Z(t) \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

admet une unique solution dans E, donnée par :

$$Y(t) = Z(t) + B \int_0^t [\mathrm{sh}(t-x)B]\, Z(x)\, dx.$$

III.4. Si $Z(t) = t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que la solution Y de l'équation précédente est aussi solution du système :

$$\begin{cases} Y''(t) - AY(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} & \forall t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ Y(0) = Y'(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que c'est la seule solution de ce système.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail